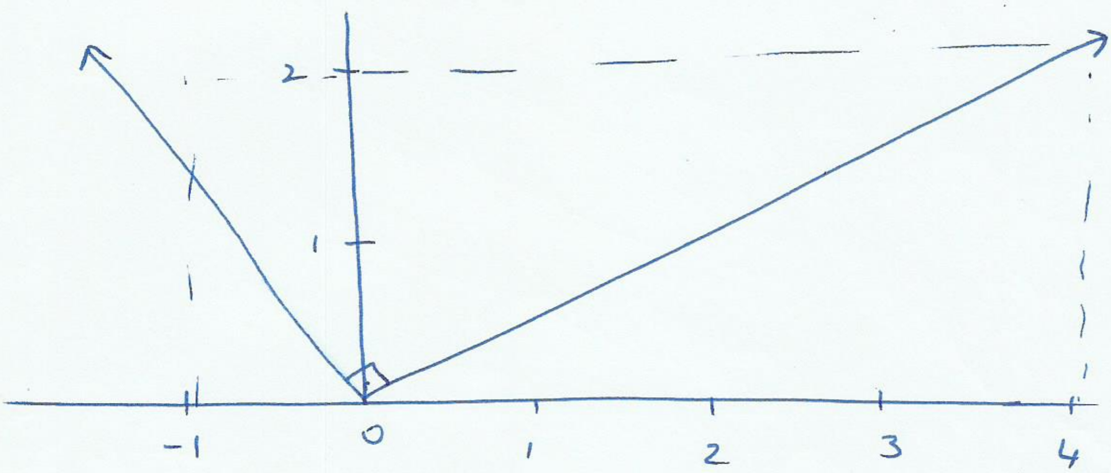
1.10 Ortagonal Vektörler ve Matrisler

$n \times 1$ boyutlu a ve b vektörleri,

$$a'b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0$$

eşitliğini sağlarsa ortogonaldir denir. Geometrik olarak ortogonal vektörler birbirlerine diktirler.



$x_1 = (4, 2)'$

$x_2 = (-1, +2)'$ vektörleri şekildeki gibi verilsin.

$x_1' x_2 = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (+2) = 0$ 'dır.

a bir vektör ve A'da bir matris olsun.

Eğer $a'A = 1$ ise a vektörü standartlaştırılmıştır denir. Bir b vektörü kendi uzunluğuna bölünerek $\sqrt{b'b}$ standartlaştırılabilir.

$$c = \frac{b}{\sqrt{b'b}}$$

Standartlaştırılmış ve karşılıklı ortogonal $p \times 1$ boyutlu $c_1, c_2, \ldots, c_p$ vektörleri ortonormal vektör kümesi olarak adlandırılırlar. Eğer $p \times p$ boyutlu bir C matrisi ortonormal sütunlara sahipse C'ye ortogonal matris denir.

$$C'C = I$$

C ortogonal ise, $C' = C^{-1}$ 'dir.

ÖR
7 Ortogonal bir matrise örnek olarak sütunları ikili olarak ortogonal ama ortonormal olmayan A matrisi aşağıda verilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Üç sütunu standartlaştırmak için sırasıyla, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ ve $\sqrt{2}$ olan kendi boylarına bölersek,

$$C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

standartlaştırılmış matris-vektör.

matrisi elde edilir.

1.11. İz

$n \times n$ boyutlu $A = (a_{ij})$ matrisinin izi A matrisinin köşegen elemanlarının toplamı şeklinde tanımlanır. Yani,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \text{ dir.}$$

ÖR 7

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = 8 + (-3) + 9 = 14$$

Teorem

I. A ve B $n \times n$ boyutlu matrisler olsun.

$$tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$$

II. A, $n \times p$ boyutlu ve B, $p \times n$ boyutlu matris olsun.

$$tr(AB) = tr(BA)$$

III. A, $n \times p$ boyutlu matris olsun.

$$tr(A'A) = \sum_{i=1}^{n} a_i' a_i$$

Burada, a_i : i. sütun elemanıdır.

IV. A, $n \times p$ boyutlu bir matris olsun.

$$tr(AA') = \sum_{i=1}^{n} a_i' a_i$$

Burada, a_i' : A'nın i. satır elemanıdır.

ÖRNEK

A ve B matrisleri verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 16 \\ 4 & -8 & -3 \\ 24 & 16 & 34 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 30 & 32 \end{bmatrix}$$

$tr(A) =$ Yok. $\quad tr(AB) = 9 + (-8) + 34 = 35$

$tr(BA) = 3 + 32 = 35$

bulunur.

Teorem

A, nxp boyutlu r rankli bir matris olsun. A^-, A'nın genelleştirilmiş inversi olmak üzere;

$$tr(A^-A) = tr(AA^-) = r$$

olarak yazılır.